



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016

CLASA A IX-A

Subiectul I.

- a) Arătați că $n^4 > (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1)$, unde n este un număr natural nenul.
- b) Calculați $[S]$, unde $S = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{2016^4}$, unde $[S]$ reprezintă partea întreagă a lui S .

Subiectul II.

- a) Arătați că în orice triunghi ABC are loc relația $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, unde O este centrul cercului circumscris triunghiului iar H este ortocentrul triunghiului.
- b) Fie $ABCD$ un patrulater înscris în cercul de centru O și care are diagonalele AC și BD perpendiculare. Dacă H_1 și H_2 sunt ortocentrele triunghiurilor ACD și ABC , arătați că $\overrightarrow{BH_2} = \overrightarrow{DH_1}$.

Subiectul III

- a) Câte progresii aritmetice de numere naturale există cu primul termen 1 și care conțin numărul 45001?
- b) Arătați că nu există progresii aritmetice neconstante de numere naturale cu toți termenii pătrate perfecte.

Subiectul IV.

Fie a, b, c numere reale strict pozitive. Demonstrați că :

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{a^2}{(b+c)^4} + \frac{b^2}{(a+c)^4} + \frac{c^2}{(a+b)^4} \geq \frac{3}{2}.$$

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.



**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016
CLASA A X- A**

SUBIECTUL I

- a) Să se rezolve ecuația $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$.
- b) Dacă $x \in [2, \infty)$ să se calculeze $\left[\log_{[x]} x \right]$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a lui a .

SUBIECTUL II

Să se rezolve ecuația $2\sqrt[3]{2x-1} = x^3 + 1$.

SUBIECTUL III

Numerele distincte $z_1, z_2, z_3 \in C^*$ au modulele egale. Considerăm numerele $a = \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2}, b = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3},$

$c = \frac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$. Să se arate că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = -1$ atunci $a = b = c$.

SUBIECTUL IV

Determinați numerele $a, b, c \in [-2, 2]$ și $n \in \mathbb{N}^*$ știind că $a + b + c = -3$, $a^3 + b^3 + c^3 = -15$, $a \leq b \leq c$ și $a^n + b^n + c^n = 8n + 1$.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Toate subiectele sunt obligatorii.



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016

CLASA A XI- A

Subiectul I

Determinați matricea $A \in M_3(C)$, dacă $A^* = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ 1 & -5 & 7 \\ 7 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

Subiectul II

Se consideră matricea $X(a) = \begin{pmatrix} 1+ka & ka \\ a & 1+a \end{pmatrix}$, $a \in C^*$, $k \in N^*$. Să se calculeze $(X(a))^n$, $n \in N^*$

Subiectul III

Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$ definit prin

$$x_0 = 0$$

$$x_n = 1 + \sin(x_{n-1} - 1), (\forall) n \geq 1$$

Studiați convergența șirului și apoi determinați limita sa.

Subiectul IV

Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x \cos 2x \cos 4x \dots \cos 2^n x}{(x - \pi)^2}$

Timp de lucru: 3 ore

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte

Toate subiectele sunt obligatorii

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ – 21.02.2016

CLASA A XII- A

Subiectul I

Fie în $M_3(\mathbb{R})$ matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și pentru fiecare $t \in \mathbb{R}/\{0\}$ definim matricea

$$M_t = \frac{t}{3}A + \frac{1}{3t^2}B.$$

1. Să se arate că mulțimea de matrice $G = \{M_t | t \in \mathbb{R}/\{0\}\}$ este un grup în raport cu înmulțirea matricelor.
2. Să se arate că funcția $f: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow G, f(t) = M_t$ este un izomorfism de grupuri.

Subiectul II

Fie (G, \cdot) și $a, b \in G$ diferite cu proprietățile $a \neq e, b \neq e, a^7 = e, aba^{-1} = b^2$ unde e este elementul neutru al grupului G . Să se determine ordinele elementelor a și b .

Subiectul III

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} k + \sin x \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ k, & x = 0 \end{cases}$ și

$$J_n = \int_{-\frac{k}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[n + \left(\frac{1}{n} - n \right) \chi(x) \right] \cdot f(x) dx, \chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right] \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases} \text{ Determinați } k \text{ astfel încât } \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 12.$$

Subiectul IV

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea $e^{f(x)} + f(x) \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Să se arate că $\int_1^{e+1} f(x) dx \leq \frac{3}{2}$.

NOTA: Timp de lucru 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.